Кохан Ярослав Олексійович, к. філос. н.

СИСТЕМА АЛЬТЕРНАТИВ ЯК ТЕОРЕТИЧНИЙ ОБ'ЄКТ ЛОГІКИ

Системою альтернатив на заданій предметній області D ми називаємо будь-яку множину n-місних предикатів, один і тільки один з яких здійснюється на будь-якій n-ці предметів з D. У статті будуються начала теорії систем альтернатив. Порівнюються пари множин всіх систем альтернатив, у котрі входять предикати, між якими задане конкретне відношення. Встановлюється зв'язок між поняттями системи альтернатив та класифікації, досліджується відношення ортогональності між системами альтернатив, описуються багатовимірні класифікації. Обговорюються можливі застосування теорії систем альтернатив у логіці, математиці, філософії та психології.

Ключові слова: предикат, система альтернатив, класифікація, ортогональність, вибір.

We call a system of alternatives on a given domain D any set of n-ary predicates, one and only one of those satisfies for every n-tuple of individuals from D. The fundamentals of the system of alternatives theory are build in the paper. Next we compare pairs of sets consisting from systems of alternatives that include predicates between which a particular relation is established. Next the connection between the concepts of a system of alternatives and classification is established, the orthogonality relation between systems of alternatives is investigated, multidimensional classifications are introduced and described. Possible applications of the systems of alternatives theory in logic, mathematics, philosophy and psychology are discussed.

Keywords: predicate, system of alternatives, classification, orthogonality, choice.

Постановка проблеми

Мотивація. Опис тієї чи іншої частини дійсності ми здійснюємо за допомогою предикатів. При цьому, вводячи всякий новий предикат, ми неявно передбачаємо, що він відповідає деякій можливості, деякому можливому стану справ, і крім нього існує лише обмежена кількість інших можливостей, одна з яких має справдитися, якщо не справдилася описувана даним предикатом; ці можливості описуватимуться якимись іншими предикатами. Тим самим предикати природно групуються в *системи альтернатив*, у кожній з яких для всякого набору аргументів здійснюється одна і тільки одна альтернатива-предикат. Так, для пар дійсних чисел існує три альтернативи: перше з чисел або більше за друге, або менше, або рівне йому (є тим самим числом); відтак, якщо ми введемо предикат $<^{(2)}$ *Менше* на області дійсних чисел, ми повинні потурбуватися і про введення альтернативних до нього предикатів $>^{(2)}$ *Більше* та $=^{(2)}$ *Дорівнює*. Зробити це можна двома способами: (a) явно задавши ці предикати і явно описавши відношення між ними або (b) задавши такі постулати (позалогічні аксіоми), на основі яких можна було б означити відповідні альтернативні предикати (насправді тільки один, бо другий доведеться також ввести як початковий), а відношення між ними довести як (позалогічні) теореми. Аксіоматичний спосіб дослідження (b) достатньо розроблений в логіці і складає предмет цілих розділів цієї науки, а саме, логічного синтаксису та теорії доведень. Безпосереднє ж задання систем альтернатив досі перебувало поза рамками теоретичного дослідження. Пропонована стаття компенсує цю прогалину в корпусі логічних теорій.

Позначення й термінологія. За основу всякого логіко-предикатного розгляду ми беремо три множини: множину $\mathbb{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ значень істинності, де $\mathbf{1}$ — це істина, а $\mathbf{0}$ — це лож (хиба), *предметну область*, або *домен*, D, тобто, множину довільних об'єктів, які ми називатимемо (*логічними*) *предметами*, та непорожню скінченну множину Ω заданих на D предикатів (ми обмежуємо теорію скінченним випадком, виходячи з практичних міркувань; див. останній розділ, присвячений застосуванням).

Окремі предмети ми позначаємо *вільними предметними змінними* 'a_i', де $i \in \mathbb{N}$, і 'a_0' скорочується до 'a'. На всі або деякі предмети ми *посилаємося* (при квантифікації має місце саме узагальнене посилання, а не позначення) за допомогою *зв'язаних предметних змінних* 'x_i', де $i \in \mathbb{N}$, і 'x_0' скорочується до 'x'.

В логіці існує два різних розуміння терміна «предикат» (а також деякі інші розуміння, які не набули поширення, тому ми їх не обговорюємо). Під предикатом, або, точніше, *n-місним* (або *n-арним*) *предикатом*, (*заданим*) *на*

D, розуміють або n-місне відношення, задане на D, або однозначну функцію типу f: D ↦ $\mathbb{B}$. Позначатимемо предикати-відношення *вільними предикатними змінними* ‘$P_i^{(n)}$’, ‘$R_i^{(n)}$’, ‘$S_i^{(n)}$’, де $i \in \mathbb{N}$, і ‘$P_0^{(n)}$’, ‘$R_0^{(n)}$’, ‘$S_0^{(n)}$’ скорочуються до ‘$P^{(n)}$’, ‘$R^{(n)}$’, ‘$S^{(n)}$’ відповідно, а предикати-функції — *вільними предикатними змінними* ‘$F_i^{(n)}$’, ‘$G_i^{(n)}$’, ‘$H_i^{(n)}$’, де $i \in \mathbb{N}$, і ‘$F_0^{(n)}$’, ‘$G_0^{(n)}$’, ‘$H_0^{(n)}$’ скорочуються до ‘$F^{(n)}$’, ‘$G^{(n)}$’, ‘$H^{(n)}$’ відповідно; квантифікацію по предикатах ми не використовуватимемо, тому *зв’язані* предикатні змінні нам не знадобляться. Той факт або умова, що деякі $a_1, ..., a_n \in$ D перебувають у відношенні $P_i^{(n)}$, ми традиційно записуємо у вигляді формули ‘$P_i(a_1, ..., a_n)$’, а факт або умова, що функція $F_j^{(n)}$ набуває на тих самих аргументах $a_1, ..., a_n$ значення $\boldsymbol{i} \in \mathbb{B}$, ми так само традиційно записуємо у вигляді формули ‘$F_j(a_1, ..., a_n) = \boldsymbol{i}$’ (арності предикатів при цьому не пишуться).

Слід звернути особливу увагу на те, що використання значень істинності **1** та **0** для опису предикатів не означає, що ми опиняємося в області семантики. Навпаки: значення істинності є такими ж об’єктами онтології (позначуваної дійсності, світу денотатів), як і будь-які предмети з D та будь-які предикати з Ω, а прирівнювання значення $F(a_1, ..., a_n)$ будь-якого предиката $F^{(n)}$ до значення істинності **1** або **0** належить єдиному світу денотатів так само, як це відбувається в математиці з будь-якими рівняннями ‘$f(a_1, ..., a_n) = a_0$’. Відтак, вся теорія предикатів лежить в області онтології. При цьому предикати мають властивості, аналогічні властивостям формул у семантиці (в теорії моделей). В цій статті ми використовуємо такі властивості предикатів, як тотожна істинність, тотожна хибність, нейтральність, здійсненність та не здійсненність на D та на D^n. Ми називаємо предикат $P^{(n)}$, відповідно $F^{(n)}$, *тотожно-істинним на* D^n (відповідно, *тотожно-хибним на* D^n; *нейтральним на* D^n) я. я. (якщо і тільки якщо) на будь-якій (відповідно, на жодній; на деякій, але не кожній) n-ці $<a_1, ..., a_n> \in$ D^n має місце факт $P(a_1, ..., a_n)$, відповідно, факт $F(a_1, ..., a_n) = \mathbf{1}$. Ми називаємо предикат $P^{(n)}$, відповідно $F^{(n)}$, *здійсненним на* D^n (відповідно, *не здійсненним на* D^n) я. я. знайдеться (відповідно, не знайдеться) така n-ка $<a_1, ..., a_n> \in$ D^n, на якій має місце факт $P(a_1, ..., a_n)$, відповідно, факт

$F(a_1, ..., a_n) = \mathbf{1}$. Зрозуміло, що якщо підставити в ці означення 'D' замість 'D^n' і «$a_1, ..., a_n \in D$» замість «$<a_1, ..., a_n> \in D^n$», отримаємо коректні означення понять тотожної істинності, тотожної хибності, нейтральності, здійсненності та не здійсненності на D, еквівалентні тільки-но введеним поняттям для D^n. Тому надалі ми користуємося формулюваннями обох наведених типів.

Як відомо, обидва трактування поняття предиката — як відношення та як функції — *еквівалентні* в тому сенсі, що на будь-якій даній D, по-перше, для всіх $a_1, ..., a_n \in D$ і всякого предиката $P^{(n)}$ знайдеться такий предикат $F^{(n)}$, що мають місце еквіваленції

$$P(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow F(a_1, ..., a_n) = \mathbf{1} \quad (1)$$

і

$$\neg P(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow F(a_1, ..., a_n) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

і, по-друге, для всякого предиката $F^{(n)}$ знайдеться такий предикат $P^{(n)}$, що мають місце еквіваленції (1) і (2). В силу такої еквівалентності ми надалі описуватимемо заради простоти лише предикати-відношення; все сказане про них легко перенести і на предикати-функції. Для обох понять предиката ми сформулюємо лише означення основного поняття даної роботи — поняття системи альтернатив.

Екстенсіональний та інтенсіональний підходи. Відношення між предикатами та їхніми умовами істинності визначаються тим очевидним фактом, що тотожні предикати суть еквівалентні, що символізується формулою

$$P^{(n)} = R^{(n)} \rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (P(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow R(x_1, ..., x_n)). \quad (3)$$

В сучасній логіці практично завжди приймають *екстенсіональну*, або *об'ємнісну*, трактовку поняття предиката. Це означає, що предикати трактуються винятково як об'єми, множини, а отже, еквівалентні предикати ототожнюються. Це можна виразити за допомогою формули

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (P(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow R(x_1, ..., x_n)) \rightarrow P^{(n)} = R^{(n)}, \quad (4)$$

конверсної до формули (3). Екстенсіональний підхід до предикатів достатній для застосувань у математиці, але є хибним в загальному випадку, що можна показати навіть на математичних прикладах. Скажімо, відношення *Бути перетином всіх бісектрис трикутника ...* та *Бути перетином всіх медіан трикутника ...* очевидно не тотожні, однак здійснюються на одних і тих самих парах <точка, трикутник>, яку б D ми не вибрали. Тим більше, навіть для не еквівалентних предикатів завжди можна так вибрати предметну область D, що на ній вони стануть еквівалентними. Відтак, в загальному випадку слід відрізняти всякий предикат від його графіка — так само, як це має місце для функцій загального виду. Такий не екстенсіональний підхід до предикатів і таке їхнє трактування називатимемо *інтенсіональним*, або *змістовним*. За нього формула (4) відкидається як хибна. Надалі ми приймаємо саме інтенсіональний підхід; за нього, приміром, ми не ототожнюємо предикати *Тварина, що має стать* та *Той, хто є самцем або самицею* на всякій D, яка містить тварин лише належних до видів зі статевим розмноженням, і не містить гермафродитів.

Тим не менше, випадки, коли екстенсіональний підхід застосовний, мають самостійний інтерес. Тому нижче ми відзначатимемо їх окремо.

Означення поняття системи альтернатив. Будь-яка множина $\mathbb{A}$ n-місних предикатів, означених на даній D, тобто, будь-яка підмножина множини Ω називається *системою альтернатив на* D, я. я. здійснюються наступні дві умови:

$$\text{(i) } \forall x_1 \ldots \forall x_n \left(\bigvee_{P^{(n)} \in \mathbb{A}} P(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

(словами: *диз'юнкція всіх предикатів з* $\mathbb{A}$ *тотожно-істинна на* D);

$$\text{(ii) } (P^{(n)} \neq R^{(n)})_{P^{(n)},\, R^{(n)} \in \mathbb{A}} \rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \neg\, (P(x_1, \ldots, x_n) \wedge R(x_1, \ldots, x_n))$$

(словами: *всі предикати з* $\mathbb{A}$ *попарно несумісні на* D).

Якщо задати деякий перерахунок елементів множини $\mathbb{A}$ індексами i з якоїсь довільної множини I, ці самі умови для випадку предикатів-функцій можна сформулювати наступним чином:

(i) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\bigvee_{i \in I} F_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{1})$;

(ii) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\bigwedge_{i \in \{j, k\} \subseteq I, j \neq k} F_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{0})$.

Предикати-елементи всякої системи альтернатив $\mathbb{A}$ називаються *альтернативами з* (або *належними*) $\mathbb{A}$, а також *альтернативами* один відносно одного. Кількість альтернатив з $\mathbb{A}$ — це потужність $\|\mathbb{A}\|$ множини $\mathbb{A}$.

Елементи теорії систем альтернатив

Основні властивості систем альтернатив. Найперша властивість систем альтернатив виражається наступною умовою: які б не були система альтернатив $\mathbb{A}$ та предикат $P^{(n)} \in \mathbb{A}$, має місце еквіваленція

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\neg P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \bigvee_{R^{(n)} \in \mathbb{A} \setminus \{P^{(n)}\}} R(x_1, \ldots, x_n)). \qquad (5)$$

Доведення. Всякий предикат $P^{(n)} \in \Omega$ розбиває область D^n на дві підобласті: *область істинності* $\mathrm{dom}_1 P^{(n)}$ предиката $P^{(n)}$ та *область* $\mathrm{dom}_0 P^{(n)}$ його *хибності*:

$$\mathrm{D}^n = \mathrm{dom}_1 P^{(n)} \cup \mathrm{dom}_0 P^{(n)},$$

$$\varnothing = \mathrm{dom}_1 P^{(n)} \cap \mathrm{dom}_0 P^{(n)}.$$

З пункту (i) означення поняття системи альтернатив та очевидного факту

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\bigvee_{R^{(n)} \in \mathbb{A}} R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow (P(x_1, \ldots, x_n) \vee \bigvee_{R^{(n)} \in \mathbb{A} \setminus \{P^{(n)}\}} R(x_1, \ldots, x_n)))$$

безпосередньо випливає, що предикат, заданий квазіформулою ‘$\bigvee_{R^{(n)} \in \mathbb{A} \setminus \{P^{(n)}\}} R(x_1, \ldots, x_n)$’, є тотожно-істинним на $\mathrm{dom}_0 P^{(n)}$; з пункту ж (ii) означення поняття системи альтернатив випливає, що всі $R^{(n)}$ з $\mathbb{A} \setminus \{P^{(n)}\}$ тотожно-хибні на $\mathrm{dom}_1 P^{(n)}$, а отже, тотожно-хибна на $\mathrm{dom}_1 P^{(n)}$ і їхня диз’юнкція. Відтак,

$$\mathrm{dom}_1 P^{(n)} = \mathrm{dom}_0 \bigvee_{R^{(n)} \in \mathbb{A} \setminus \{P^{(n)}\}} R^{(n)}$$

і

$$\mathrm{dom}_0 P^{(n)} = \mathrm{dom}_1 \bigvee_{R^{(n)} \in \mathbb{A} \setminus \{P^{(n)}\}} R^{(n)},$$

що й доводить формулу (5). □

Який вигляд матиме найменша за кількістю елементів система альтернатив? З означення поняття системи альтернатив випливає, що це буде множина, яка складається з одного єдиного предиката. А точніше, маємо

ТВЕРДЖЕННЯ 1. *Всяка підмножина множини* Ω, *яка складається з одного єдиного тотожно-істинного на* D *предиката, є системою альтернатив на* D.

Доведення. Справді, розглянемо множину $\{P^{(n)}\}$, яка складається з одного єдиного предиката $P^{(n)}$, тотожно-істинного на D. Допущенно говорити про диз'юнкцію з одної єдиної конституенти. Диз'юнкція, єдиною конституентою якої є тотожно-істинний на D предикат, сама буде тотожно-істинною на D; відтак, множина $\{P^{(n)}\}$ задовольняє пункту (і) означення поняття системи альтернатив. З другого боку, не існує жодного предиката $R^{(n)}$ такого, що

$$R^{(n)} \in \{P^{(n)}\} \wedge R^{(n)} \neq P^{(n)} \wedge \exists x_1 \ldots \exists x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \wedge P(x_1, \ldots, x_n)),$$

а отже, для всіх $R^{(n)} \in \{P^{(n)}\}$ вірно, що

$$R^{(n)} \neq P^{(n)} \rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \neg \, (R(x_1, \ldots, x_n) \wedge P(x_1, \ldots, x_n));$$

а це якраз означає, що множина $\{P^{(n)}\}$ задовольняє пункту (іі) означення поняття системи альтернатив. □

Назвемо всяку одноелементну систему альтернатив *виродженою*. З твердження 1 безпосередньо випливає наступне

ТВЕРДЖЕННЯ 2. *На всякій непорожній D існує вироджена система альтернатив.*

Точніше, на всякій даній D існує стільки вироджених систем альтернатив, скільки є тотожно-істинних на D елементів множини Ω.

Зрозуміло, що такі системи альтернатив теоретично не цікаві — інтерес представляють лише системи, в яких є різні елементи, тобто, потужність яких не менша за 2.

Нехай дано множини A і B такі, що A ⊂ B. Казатимемо, що A є *звуженням* B, а B — *розширенням* A, і що A *розширюється до* B, а B — *звужується до* A. Якщо при цьому B = A ∪ $\{a_1, ..., a_n\}$, казатимемо, що B є *поповненням* множини A *за допомогою* об'єктів $a_1, ..., a_n$. Маємо

ТВЕРДЖЕННЯ 3. *Поповнення довільної системи альтернатив на* D *за допомогою предиката* $P^{(n)}$ *саме́ є системою альтернатив я. я.* $P^{(n)}$ *не здійсненний на* D.

Доведення. Нехай дано систему альтернатив $\mathbb{A}$ на D, що складається з n-місних предикатів, і предикат $P^{(n)}$ такий, що $P^{(n)} \in \Omega \setminus \mathbb{A}$.

Достатність. Припустимо, що $P(a_1, ..., a_n)$, тобто, $P^{(n)}$ здійснюється на $<a_1, ..., a_n>$. Згідно з пунктом (i) означення поняття системи альтернатив, хоча б один елемент $\mathbb{A}$ здійснюється на $<a_1, ..., a_n>$. Позначимо цей елемент через '$R^{(n)}$'. В цьому разі, маємо $P(a_1, ..., a_n) \wedge R(a_1, ..., a_n)$, що несумісно з пунктом (ii) означення поняття системи альтернатив. Отже, множина $\mathbb{A} \cup \{P^{(n)}\}$ не є системою альтернатив.

Необхідність. Припустимо, що $\forall x_1 ... \forall x_n \neg P(x_1, ..., x_n)$, тобто, $P^{(n)}$ не здійсненний на D. В такому разі, $\mathbb{A} \cup \{P^{(n)}\}$ є системою альтернатив, оскільки істинні наступні дві умови:

$$\forall x_1 ... \forall x_n (\bigvee_{R^{(n)} \in \mathbb{A}} R(x_1, ..., x_n) \vee P(x_1, ..., x_n)),$$

$$R^{(n)} \in \mathbb{A} \rightarrow \forall x_1 ... \forall x_n \neg(R(x_1, ..., x_n) \wedge P(x_1, ..., x_n)),$$

які відповідають пунктам (i) та (ii) означення поняття системи альтернатив. □

Таким чином, всяке поповнення будь-якої системи альтернатив тотожно-істинними і/або нейтральними на D предикатами саме́ не є системою альтернатив.

Назвемо систему альтернатив на D *нетривіальною*, я. я. всі її елементи здійсненні на D. Нетривіальні системи альтернатив є єдино важливими з *практичного* погляду. Доведемо ряд тверджень, які стосуються властивості нетривіальності. Перш за все, зафіксуємо очевидне

ТВЕРДЖЕННЯ 4. *Будь-яка система альтернатив на даній* D:

a) *не може містити більш ніж один тотожно-істинний на* D *предикат*;

b) *містить або тотожно-істинні, або нейтральні на* D *предикати, але не ті й другі разом*;

c) *не може містити точно один нейтральний на* D *предикат*.

Всі пункти даного твердження безпосередньо випливають з умови (ii) означення поняття системи альтернатив. Далі, з твердження 2 та означення поняття нетривіальності безпосередньо випливає

ТВЕРДЖЕННЯ 5. *Якщо* A *і* B *суть системи альтернатив, і* $A \subset B$, *то* B *не є нетривіальною*.

Також з твердження 2 випливає, що можна утворювати нові системи альтернатив не тільки додаванням до деякої заданої $\mathbb{A}$ не здійсненних предикатів, але й їх вилученням з $\mathbb{A}$. Такий процес поетапного вилучення предикатів з $\mathbb{A}$ обов'язково буде скінченним. А саме, маємо

ТВЕРДЖЕННЯ 6. *Для всякої системи альтернатив* $\mathbb{A}$ *на* D, *яка не є нетривіальною, існує така система альтернатив* $\mathbb{A}_0$ *на* D, *що* $\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}$ *і* $\mathbb{A}_0$ *нетривіальна*.

Доведення. З пункту (i) означення поняття системи альтернатив випливає, що всяка система альтернатив містить здійсненні на D предикати. За умовою, $\mathbb{A}$ не є нетривіальною, отже, містить також і не здійсненні на D предикати. Відтак, можна розбити $\mathbb{A}$ на дві не перетинні підмножини $\mathbb{A}_{(1)}$ здійсненних та $\mathbb{A}_{(0)}$ не здійсненних на D предикатів. Залишається показати, що $\mathbb{A}_{(1)}$ є системою альтернатив. В силу твердження 4, $\mathbb{A}_{(1)}$ складається або з одного єдиного тотожно-істинного на D предиката, або більш ніж з одного нейтрального на D предиката і не містить тотожно-істинних на D предикатів. У першому з цих випадків, в силу твердження 1, $\mathbb{A}_{(1)}$ є виродженою системою альтернатив. Розгляньмо другий випадок. Для будь-якої множини M предикатів з Ω вірно, що

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \left(\left(\bigvee_{P^{(n)} \in \mathrm{M}} P(x_1, \ldots, x_n) \vee \bigvee_{R^{(n)} \in \mathbb{A}_{(0)}} R(x_1, \ldots, x_n)\right) \leftrightarrow \bigvee_{P^{(n)} \in \mathrm{M}} P(x_1, \ldots, x_n)\right),$$

відтак, це вірно і для M = $\mathbb{A}_{(1)}$. Оскільки ж диз'юнкція всіх предикатів з $\mathbb{A}$ в силу пункту (i) означення поняття системи альтернатив тотожно-істинна на D, це разом означає, що й диз'юнкція всіх предикатів з $\mathbb{A}_{(1)}$ також тотожно-істинна на D, а отже, $\mathbb{A}_{(1)}$ задовольняє умові (i) означення поняття системи альтернатив. Також $\mathbb{A}_{(1)}$ задовольняє умові (ii) означення поняття системи альтернатив, оскільки ця умова стосується будь-яких пар елементів $\mathbb{A}$, а отже й будь-яких пар елементів $\mathbb{A}_{(1)}$ в силу того, що $\mathbb{A}_{(1)} \subseteq \mathbb{A}$. Остаточно: $\mathbb{A}_{(1)}$ є системою альтернатив і містить тільки здійсненні на D предикати, відтак, вона і є шуканою $\mathbb{A}_0$. □

Назвемо *мінімальною* всяку таку систему альтернатив на D, будь-яка власна підмножина якої не є системою альтернатив. Вироджені системи альтернатив очевидно є мінімальними, отже, мінімальні системи альтернатив існують на будь-якій непорожній D за умови, що відповідна Ω містить бодай один тотожно-істинний на даному D предикат. Більше того, маємо

ТВЕРДЖЕННЯ 7. a) *Всяка система альтернатив на* D *або мінімальна, або може бути звужена до мінімальної на* D *системи альтернатив;* b) *всяка мінімальна система альтернатив або вироджена, або нетривіальна*.

Доведення. Розглянемо не мінімальну $\mathbb{A}$ на D. В силу твердження 4, вона або містить один-єдиний тотожно-істинний на D предикат $P^{(n)}$, або не містить. В першому випадку множина $\{P^{(n)}\}$ буде шуканою мінімальною системою альтернатив. У другому випадку, в силу твердження 4, $\mathbb{A}$ міститиме більш ніж один нейтральний предикат. Виділимо множину $\mathbb{A}_{(1)}$ всіх нейтральних предикатів з $\mathbb{A}$, як це було здійснено в доведенні твердження 6. Там же було доведено, що $\mathbb{A}_{(1)}$ є нетривіальною системою альтернатив. Якщо вилучити з неї будь-який предикат $R^{(n)}$, то диз'юнкція предикатів, що лишилися, в силу формули (5), буде тотожно-хибною на множині $\mathrm{dom}_1 R^{(n)}$ істинності предиката $R^{(n)}$, отже, не буде тотожно-істинною на D (оскільки $\mathrm{dom}_1 R^{(n)} \subseteq \mathrm{D}$), тобто, не задовольнятиме умові (i) означення поняття системи альтернатив, тож не буде системою альтернатив. Звідси, $\mathbb{A}_{(1)}$ мінімальна. Це і доводить обидва пункти a), b) твердження. □

Порівняння множин систем альтернатив. Нехай $\{\mathbb{A}_P\}$ — множина всіх систем альтернатив на D, в які входить предикат $P^{(n)}$ з Ω. Постає питання: якщо між предикатами $P^{(n)}, R^{(n)} \in \Omega$ має місце якесь відоме відношення $*^{(2)}$, як співвідноситимуться відповідні їм множини $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$?

1. *Еквівалентність*. Нехай

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R(x_1, \ldots, x_n)),$$

тобто, $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ еквівалентні (символічно: $P^{(n)} \equiv R^{(n)}$).

В цьому випадку заміна в будь-якій системі альтернатив $\mathbb{A}_P$ ($\mathbb{A}_P \subseteq \Omega$) предиката $P^{(n)}$ на предикат $R^{(n)}$ перетворить її на систему альтернатив з $\{\mathbb{A}_R\}$. В силу пункту (ii) означення поняття системи альтернатив, еквівалентні $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ не можуть входити в одні й ті самі системи альтернатив, отже, заміна предиката $P^{(n)}$ на $R^{(n)}$ всюди в $\{\mathbb{A}_P\}$ встановлює між $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ взаємно-однозначну відповідність, яку можна описати наступним чином. Нехай дано відображення $\varphi_{P,R}\colon \Omega \mapsto \Omega$ і $\psi_{P,R}\colon 2^\Omega \mapsto 2^\Omega$, задані наступним чином:

$$\varphi_{P,R}(S^{(n)}) = \begin{cases} R^{(n)}, \text{ якщо } S^{(n)} = P^{(n)}; \\ P^{(n)}, \text{ якщо } S^{(n)} = R^{(n)}; \\ S^{(n)}, \text{ якщо } S^{(n)} \neq P^{(n)} \text{ і } S^{(n)} \neq R^{(n)} \end{cases}$$

і

$$\psi_{P,R}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \varnothing, \text{ якщо } \mathrm{M} = \varnothing; \\ \varphi_{P,R}[\mathrm{M}], \text{ якщо } \mathrm{M} \neq \varnothing; \end{cases}$$

тут $\mathrm{M} \subseteq \Omega$, а $\varphi_{P,R}[\mathrm{M}]$ — це $\varphi_{P,R}$-образ множини M. Згідно з цими означеннями, відображення $\varphi_{P,R}{}^{(1)}$ замінює місцями предикати $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$, залишаючи всі інші предикати з Ω без змін, у той час як відображення $\psi_{P,R}{}^{(1)}$ ставить кожній непорожній множині $\mathrm{M} \subseteq \Omega$ у відповідність її образ $\varphi_{P,R}[\mathrm{M}]$ при відображенні $\varphi_{P,R}{}^{(1)}$. Звідси видно, що $\psi_{P,R}(\{\mathbb{A}_P\}) = \{\mathbb{A}_R\}$ і $\psi_{P,R}(\{\mathbb{A}_R\}) = \{\mathbb{A}_P\}$, що й доводить наявність взаємно-однозначної відповідності між $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$.

Назвемо таку взаємно-однозначну відповідність *синонімією* і позначимо її через '$\simeq$'. Відтак остаточно маємо: множини $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ еквівалентних $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ синонімічні, символічно:

$$P^{(n)} \equiv R^{(n)} \rightarrow \{\mathbb{A}_P\} \simeq \{\mathbb{A}_R\}.$$

1ех. За екстенсіонального підходу еквівалентність $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ призводить, в силу (4), до рівності відповідних їм множин систем альтернатив:

$$P^{(n)} \equiv R^{(n)} \rightarrow \{\mathbb{A}_P\} = \{\mathbb{A}_R\}.$$

Синонімію множин $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ можна описати й більш загальним способом. Для цього введемо одне єдине тримісне відображення $\theta^{(3)}$ на довільних множинах, задане наступним чином:

$$\theta(\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) = \begin{cases} (\mathrm{D} \setminus \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}, \text{ якщо } \mathrm{B} \subseteq \mathrm{D}; \\ \mathrm{D}, \text{ якщо } \mathrm{B} \not\subseteq \mathrm{D}. \end{cases}$$

Процедурно $\theta^{(3)}$ полягає в тому, що ми замінюємо в кожній множині D деяку її підмножину B на довільну множину C. У випадку пункту 1 розглянемо підстановки аргументів $\mathrm{B} = \{P^{(n)}\}$, $\mathrm{C} = \{R^{(n)}\}$, $\mathrm{D} = \mathbb{A}_P$ та $\mathrm{B} = \{R^{(n)}\}$, $\mathrm{C} = \{P^{(n)}\}$, $\mathrm{D} = \mathbb{A}_R$ для кожної $\mathbb{A}_P$ і кожної $\mathbb{A}_R$; отримаємо $\theta(\{P^{(n)}\}, \{R^{(n)}\}, \mathbb{A}_P) = \mathbb{A}_{R\,\theta}$ та $\theta(\{R^{(n)}\}, \{P^{(n)}\}, \mathbb{A}_R) = \mathbb{A}_{P\,\theta}$ для деяких $\mathbb{A}_{R\,\theta}$ і $\mathbb{A}_{P\,\theta}$ відповідно. Оскільки всі $\mathbb{A}_P$ і $\mathbb{A}_R$ (включно з усіма $\mathbb{A}_{R\,\theta}$ і $\mathbb{A}_{P\,\theta}$) складаються з одних і тих самих елементів, за винятком хіба елементів $P^{(n)}$ та $R^{(n)}$, це й доводить наявність взаємно-однозначної відповідності між $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$, тобто, синонімічність цих двох множин. У випадку пункту 1ех в силу (4) додатково маємо $P^{(n)} = R^{(n)}$, а тому й $\{\mathbb{A}_P\} = \{\mathbb{A}_R\}$.

Введемо для зручності додаткову термінологію. Казатимемо, що предикат $P^{(n)}$ (відповідно, система альтернатив $\mathbb{A}$ така, що $P^{(n)} \in \mathbb{A}$) *порушує* (*не порушує*) *межі* деякого іншого предиката $R^{(n)}$, я. я. здійснюються обидві наступні умови (не здійснюється хоча б одна з двох наступних умов):

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(P(x_1, \ldots, x_n) \wedge R(x_1, \ldots, x_n)),$$
$$\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(P(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \ldots, x_n)).$$

2. *Підпорядкування/Зумовлення*. Нехай

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (P(x_1, \ldots, x_n) \to R(x_1, \ldots, x_n)),$$

тобто, $P^{(n)}$ *підпорядковується* $R^{(n)}$ або, що те саме, *зумовлює* (імплікує) $R^{(n)}$ (символічно: $P^{(n)} \vDash R^{(n)}$).

В цьому випадку, якщо множина Ω достатньо багата, знайдуться предикати $S_1^{(n)}, \ldots, S_k^{(n)} \in \mathbb{A}_P$ такі, що $(P^{(n)} \vee S_1^{(n)} \vee \ldots \vee S_k^{(n)}) \equiv R^{(n)}$, тобто,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (((P(x_1, \ldots, x_n) \vee S_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee S_k(x_1, \ldots, x_n)) \leftrightarrow R(x_1, \ldots, x_n)).$$

При цьому можуть трапитися два випадки: коли предикат $S_1^{(n)} \vee \ldots \vee S_k^{(n)}$ здійсненний та, відповідно, не здійсненний на D. У кожному з них однаково всяка $\mathbb{A}_{P,\, S_1, \ldots, S_k} \in \{\mathbb{A}_P\}$ однозначно визначає деяку $\mathbb{A}_{R\,\theta} = \theta(\{P^{(n)}, S_1^{(n)}, \ldots, S_k^{(n)}\}, \{R^{(n)}\}, \mathbb{A}_{P,\, S_1, \ldots, S_k}) \in \{\mathbb{A}_R\}$. Якщо при цьому $k > 1$, то й наборів$S_1^{(n)}, \ldots, S_k^{(n)}$ може виявитися більше одного, відтак, описана відповідність в загальному випадку багато-однозначна (не взаємно-однозначна). Оскільки ж можуть існувати такі $\mathbb{A}_P$, які порушують межі предиката $R^{(n)}$, не для кожних $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ всяка $\mathbb{A}_P$ є такою $\mathbb{A}_{P,\, S_1, \ldots, S_k}$, як описано вище, відтак, описана в цьому абзаці відповідність може бути частковою. Казатимемо, що довільна множина M_1 *частково накладається на* довільну множину M_2, я. я. деяка підмножина M_0 множини M_1 може бути відображена на M_2, і позначатимемо це наступним чином: '$\mathrm{M}_1 \hookrightarrow \mathrm{M}_2$'. Звідси остаточно маємо: якщо $P^{(n)}$ зумовлює $R^{(n)}$, а в Ω існують такі предикати $S_1^{(n)}, \ldots, S_k^{(n)}$, що $(P^{(n)} \vee S_1^{(n)} \vee \ldots \vee S_k^{(n)}) \equiv R^{(n)}$, то $\{\mathbb{A}_P\}$ частково накладається на $\{\mathbb{A}_R\}$, символічно:

$$P^{(n)} \vDash R^{(n)} \wedge \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (((P(x_1, \ldots, x_n) \vee S_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee S_k(x_1, \ldots, x_n)) \leftrightarrow R(x_1, \ldots, x_n)) \to \{\mathbb{A}_P\} \hookrightarrow \{\mathbb{A}_R\}.$$

3. *Суперечливість/Контрадикторність/Альтернативність.* Нехай

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \neg R(x_1, \ldots, x_n)),$$

тобто, $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ взаємно суперечливі (контрадикторні) або, що те саме, *альтернативні* (символічно: $P^{(n)} \bowtie R^{(n)}$).

В цьому випадку множина $\{P^{(n)}, R^{(n)}\}$ є системою альтернатив, а тому $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ мають непорожній перетин, який складається з фіксованої кількості елементів виду $\mathbb{A}_{P,\,R}{}^{<i_1,\,\ldots,\,i_r>} = \{P^{(n)}, R^{(n)}, IF_{i_1}{}^{(n)}, \ldots, IF_{i_r}{}^{(n)}\}$, де $1 \leq r \leq m$, $1 \leq i_r \leq m$, а $IF_1{}^{(n)}, \ldots, IF_m{}^{(n)}$ — це всі тотожно-хибні на D предикати (один з яких може збігатися з якимось із предикатів $P^{(n)}$, $R^{(n)}$, якщо останній тотожно-хибний на D; також ми допускаємо випадок, коли $r = m = 0$ і список $<IF_1{}^{(n)}, \ldots, IF_m{}^{(n)}>$ порожній, тобто, коли в Ω не входять ніякі тотожно-хибні предикати, можливо, за винятком предиката $P^{(n)}$ або $R^{(n)}$); звідси $\|\{\mathbb{A}_P\} \cap \{\mathbb{A}_R\}\| = 2^m$. Далі, очевидно, що всяка $\mathbb{A}_P$ має вигляд $\{P^{(n)}, S_1{}^{(n)}, \ldots, S_k{}^{(n)}, IF_{i_1}{}^{(n)}, \ldots, IF_{i_r}{}^{(n)}\}$, а всяка $\mathbb{A}_R$ — вигляд $\{R^{(n)}, T_1{}^{(n)}, \ldots, T_l{}^{(n)}, IF_{i_1}{}^{(n)}, \ldots, IF_{i_r}{}^{(n)}\}$, де $(S_1{}^{(n)} \vee \ldots \vee S_k{}^{(n)}) \equiv R^{(n)}$ і $(T_1{}^{(n)} \vee \ldots \vee T_l{}^{(n)}) \equiv P^{(n)}$. Останнє означає, що існують два відображення $\phi_1{}^{(1)}$ та $\phi_2{}^{(1)}$ множин $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ в їхній перетин, які задаються як наступні підстановки:

$$\phi_1(\mathbb{A}_P) = \theta\,(\{S_1{}^{(n)}, \ldots, S_k{}^{(n)}\}, \{R^{(n)}\}, \mathbb{A}_P),$$

$$\phi_1(\mathbb{A}_R) = \theta\,(\{T_1{}^{(n)}, \ldots, T_l{}^{(n)}\}, \{P^{(n)}\}, \mathbb{A}_R).$$

У випадку, коли існують відображення $\phi_1{}^{(1)}$ та $\phi_2{}^{(1)}$, називатимемо перетин $\{\mathbb{A}_P\} \cap \{\mathbb{A}_R\}$ множин $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ їхнім *спільним коренем*. Відношення «множини $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ мають спільний корінь» позначатимемо як '$\{\mathbb{A}_P\} \Cup \{\mathbb{A}_R\}$'. Відтак, остаточно маємо: якщо предикати $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ взаємно суперечливі, або, що те саме, контрадикторні/альтернативні, то відповідні їм множини систем альтернатив $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ мають спільний корінь, символічно:

$$P^{(n)} \bowtie R^{(n)} \rightarrow \{\mathbb{A}_P\} \Cup \{\mathbb{A}_R\}.$$

3ex. За екстенсіонального підходу, перетин множин $\{\mathbb{A}_P\}$ і $\{\mathbb{A}_R\}$ складається або з двох елементів: $\mathbb{A}_1 = \{P^{(n)}\}$ та $\mathbb{A}_2 = \{P^{(n)}, R^{(n)}\}$ — якщо $P^{(n)}$ тотожно-істинний на D — або тільки з одного елемента $\mathbb{A}_2$ — якщо $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ нейтральні, а тотожно-хибних предикатів немає в Ω — або з трьох елементів: $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ та $\mathbb{A}_3 = \{P^{(n)}, R^{(n)}, IF^{(n)}\}$, де $IF^{(n)}$ — єдиний тотожно-хибний на D предикат, — якщо $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$ обидва здійсненні на D. Всі інші міркування залишаються в силі, лише замість списків $IF_{i_1}{}^{(n)}, ..., IF_{i_r}{}^{(n)}$ і $IF_1{}^{(n)}, ..., IF_m{}^{(n)}$ слід розглядати один єдиний предикат $IF^{(n)}$.

Всі інші випадки відношень між предикатами: несумісність (контрарність) $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$, їхня підконтрарність (лож-несумісність), їхня незалежність і, нарешті, сумісність — будуть розглянуті в наступних публікаціях.

Відношення між системами альтернатив. В основу аналізу відношень між системами альтернатив ми покладемо наступний підхід. Нехай дано предикат $S^{(n)} \in \Omega$, множину індексів I та таку множину предикатів $\mathrm{CL}_S = \{S_i{}^{(n)}\}_{i \in I}$, яка є системою альтернатив на $\mathrm{dom}_1 S^{(n)}$; називатимемо множину CL_S *класифікацією* предиката $S^{(n)}$. Оскільки на всякій предметній області D можна встановити тотожно-істинний предикат (за інтенсіонального підходу — навіть не один), це означає, що за деякої Ω всяка система альтернатив на D є класифікацією деякого предиката. Наш підхід полягатиме в тому, щоб виясняти, чи передбачає те чи те відношення між заданими системами альтернатив $\mathbb{A}_{[P]} = \mathrm{CL}_P$ і $\mathbb{A}_{[R]} = \mathrm{CL}_R$, котрі суть класифікації заданих предикатів $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$, наявність певного відношення між самими предикатами $P^{(n)}$ і $R^{(n)}$. Опишемо одну таку ситуацію.

1. *Ортогональність і багатовимірні класифікації*. Нехай дано множину індексів I та множину $\mathrm{U} = \{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ систем альтернатив, що складаються з n-місних предикатів, на одній і тій самій D. Називатимемо всі $\mathbb{A}_i$ *ортогональними в сукупності*, я. я. всяка кон'юнкція $\bigwedge_{i \in I} P_i(a_1, ..., a_n)$ така, що $P_i{}^{(n)} \in \mathbb{A}_i$, істинна хоча б на якихось $a_1, ..., a_n \in$ D. З такого означення негайно випливає, що всі елементи U нетривіальні. Ті самі $\mathbb{A}_i$ будуть *ортогональними попарно*, я. я. всяка кон'юнкція $P_i(a_1, ..., a_n) \wedge P_j(a_1, ..., a_n)$ така, що $P_i{}^{(n)} \in \mathbb{A}_i \wedge P_j{}^{(n)} \in \mathbb{A}_j$ $(i, j \in I)$, істинна хоча б на якихось $a_1, ..., a_n \in$ D. Зрозуміло, що якщо всі $\mathbb{A}_i$ суть ортогональні в сукупності, то вони й ортогональні попарно. Зворотне, однак, не має місця. Для доведення розглянемо приклад трьох наступних систем альтернатив: $\mathbb{A}_P = \{P^{(1)}, \neg P^{(1)}\}$, $\mathbb{A}_R = \{R^{(1)}, \neg R^{(1)}\}$, $\mathbb{A}_S = \{S^{(1)}, \neg S^{(1)}\}$, $\mathrm{U} = \{\mathbb{A}_P, \mathbb{A}_R, \mathbb{A}_S\}$. В такому разі, якщо підібрати область D й предикати $P^{(1)}$, $R^{(1)}$, $S^{(1)}$ так, щоб *не* здійснювалися всього дві альтернативи: $(P^{(1)} \wedge \neg R^{(1)} \wedge \neg S^{(1)})$ та $(\neg P^{(1)} \wedge R^{(1)} \wedge \neg S^{(1)})$ — системи альтернатив $\mathbb{A}_P$, $\mathbb{A}_R$ і $\mathbb{A}_S$ будуть ортогональними попарно, але не в сукупності. Це видно з наступних двох таблиць, в першій з яких дані номери всім альтернативам, які мають місце між двома довільними незалежними одномісними предикатами, а у другій показані альтернативи для введених вище у прикладі предикатів $P^{(1)}$, $R^{(1)}$ та $S^{(1)}$:

Таблиця 1. Альтернативи для незалежних предикатів.

	$F(x)$	$G(x)$
1)	**1**	**1**
2)	**1**	**0**
3)	**0**	**1**
4)	**0**	**0**

Таблиця 2. Альтернативи для залежних предикатів.

$P(x)$	$R(x)$	$S(x)$	$P(x)\wedge R(x)$	$P(x)\wedge S(x)$	$R(x)\wedge S(x)$
1	**1**	**1**	1)	1)	1)
1	**1**	**0**	1)	2)	2)
1	**0**	**1**	2)	1)	3)
0	**1**	**1**	3)	3)	1)
0	**0**	**1**	4)	3)	3)
0	**0**	**0**	4)	4)	4)

Поняття ортогональності тісно пов’язане з поняттям класифікації. *n-вимірною класифікацією* $\mathrm{Cl}^n(\mathrm{T}, S^{(m)})$ предиката $S^{(m)}$ (а також його області істинності $\mathrm{dom}_1 S^{(m)}$) *на* D *з базисом* T назвемо всяку таку систему альтернатив $\mathbb{A}$ на D, для якої існують множина індексів I, множина предикатів $\mathrm{T} = \{S_i^{(m)}\}_{i \in I}$ і множина систем альтернатив $\mathrm{U} = \{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ такі, що

• $\|\mathrm{T}\| = n$ (кардинал множини T, а отже, і множин I та U дорівнює n);

• $\mathbb{A}$ є класифікацією $S^{(m)}$;

• $\mathbb{A}_i$ є класифікацією $S_i^{(m)}$ для будь-якого $i \in I$;

• кожен $P^{(m)} \in \mathbb{A}$ для всіх $a_1, ..., a_m \in$ D еквівалентний на D деякій кон’юнкції $\bigwedge_{i \in I} R_i(a_1, ..., a_m)$, де $R_i^{(m)} \in \mathbb{A}_i$ для кожного $i \in I$;

• для всіх $a_1, ..., a_m \in$ D всяка кон’юнкція $\bigwedge_{i \in I} R_i(a_1, ..., a_m)$, де $R_i^{(m)} \in \mathbb{A}_i$ для кожного $i \in I$, еквівалентна деякому $P^{(m)} \in \mathbb{A}$.

Елементи множини T називатимемо *вимірами* або *осями* n-вимірної класифікації $\mathbb{A} = \mathrm{Cl}^n(\mathrm{T}, S^{(m)})$. Класифікації $\mathbb{A}_i$ вимірів $S_i^{(m)}$ всякої n-вимірної класифікації $\mathbb{A}$ називатимемо *розгортками* цієї n-вимірної класифікації $\mathbb{A}$. Основну властивість n-вимірних класифікацій встановлює наступне

ТВЕРДЖЕННЯ 8. *Всяка n-вимірна класифікація є нетривіальною системою альтернатив, я. я. множина її розгорток ортогональна в сукупності*.

Доведення тривіальне. За $n = 1$ твердження 8 вироджується в тавтологію.

Розглянемо довільну *одновимірну* класифікацію $\mathbb{A} = \mathrm{Cl}^1(\mathrm{T}, S^{(m)})$. Оскільки в цьому разі, в силу $\|\mathrm{T}\| = 1$, ми можемо покласти $\mathrm{T} = \{S^{(m)}\}$, звідки $\mathrm{U} = \{\mathbb{A}\}$ і $\mathbb{A} = \{S_i^{(m)}\}_{i \in I}$ для деякої I, а отже, $\mathbb{A} = \mathrm{CL}_S$. Це означає, що всяка одновимірна класифікація деякого предиката — це класифікація CL цього предиката в сенсі означення з початку даного пункту.

Поглянемо на відношення ортогональності в сукупності, або *сукупної ортогональності*, через призму заявленого підходу до аналізу відношень між системами альтернатив. Існує явний паралелізм між протиставленням відношень сукупної та попарної ортогональності між системами альтернатив з одного боку, та протиставленням відношень сукупної та попарної незалежності предикатів. Зокрема, сукупна (попарна) ортогональність класифікацій $\mathbb{A}_i$ предикатів $S_i^{(m)}$ з будь-якої заданої множини $\mathrm{T} = \{S_i^{(m)}\}_{i \in I}$ передбачає сукупну (попарну) незалежність самих $S_i^{(m)}$. Це безпосередньо випливає з означення поняття ортогональності. З цього ж означення випливає і зворотне: класифікації незалежних предикатів суть ортогональні. Звідси маємо

ТВЕРДЖЕННЯ 9. *Класифікації $\mathbb{A}_i$ предикатів $S_i^{(m)}$ з будь-якої заданої множини* $\mathrm{T} = \{S_i^{(m)}\}_{i \in I}$ *за будь-якої даної I сукупно (попарно) ортогональні, я. я. предикати $S_i^{(m)}$ сукупно (попарно) незалежні на* D.

Розглянемо відношення сукупної та попарної ортогональності на парах систем альтернатив. В цьому разі обидва відношення: сукупне та попарне — виявляться тотожними, тож стане можливим казати про єдине бінарне відношення ортогональності. Воно очевидно буде іррефлексивним, симетричним і не транзитивним (оскільки, якщо $\mathbb{A}_1$ ортогональна $\mathbb{A}_2$, то $\mathbb{A}_2$ ортогональна $\mathbb{A}_1$, але $\mathbb{A}_1$ не ортогональна $\mathbb{A}_1$). Таким чином, *бінарне відношення ортогональності між системами альтернатив має ті самі властивості, що й бінарне відношення несумісності предикатів* — при тому, що предикати, класифікаціями яких є взаємно ортогональні системи альтернатив, самі є незалежними, а не несумісними.

Інші бінарні відношення між системами альтернатив: деталізація, перейменування та зсув — будуть розглянуті в наступних публікаціях.

Застосування теорії систем альтернатив

Питання: «А де це можна застосувати?» стандартно виникає до кожної нової теорії (навіть, якщо відповідь очевидна або вже дана). Враховуючи обмежений обсяг статті, не обговорюватимемо можливі застосування предметно, а лише вкажемо на деякі з них.

Внутрішньологічні застосування. В логіці теорія систем альтернатив є частиною алгебраїчної теорії предикатів і відповідає баченню Жака Ербрана, який розглядав логіку як теорію відношень. Нижче вказуємо на три більш спеціальні області застосування.

1. *Аналіз предикатів*. Предикат завжди можна зобразити деякою логічною функцією від інших раніше введених предикатів. Автор називає таке зображення *аналізом* даного предиката. В [2] описано загальний підхід до побудови аналізів предикатів, вводяться поняття регулярного аналізу та розкладання предиката на альтернативи і представлена теорема про те, що по будь-якому регулярному аналізу даного предиката можна побудувати його розкладання на альтернативи. Її доведення буде наведено в наступних публікаціях.

2. *Описи стану*. Техніка описів стану Рудольфа Карнапа [1, с. 38] застосовна лише у випадках, в яких всі атомарні речення теоретичної системи попарно незалежні. Але це далеко не завжди так, в тому числі не так у випадках, які наводив сам Карнап в [1]. Використовуючи теорію систем альтернатив, можна описати узагальнення техніки описів стану на загальний випадок довільної множини предикатів, а отже й атомів. Загальна схема побудови відповідної теорії (яка виявляється значно складнішою, ніж теорія Карнапа), описана в [3]. Повна її побудова буде здійснена в подальших публікаціях.

3. *Багатозначні логіки*. Очевидно, що для всякого предиката $F^{(n)}$ і всіх $a_1, ..., a_n \in \mathrm{D}$ умови $F(a_1, ..., a_n) = \mathbf{1}$ та $F(a_1, ..., a_n) = \mathbf{0}$ складають мінімальну (в наших термінах) систему альтернатив на D. Якщо ж замінити множину значень істинності $\mathbb{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ на множину з k значень $\mathbb{B}_k = \{\boldsymbol{i}_1, ..., \boldsymbol{i}_k\}$, де $k > 2$, отримаємо знову мінімальну, але більшу систему альтернатив. Таким чином, вибір системи альтернатив лежить в основі вибору логіки. Це питання досі не досліджувалося.

Математичні застосування. Відзначимо два очевидні випадки.

4. *R-функції*. З функціями k-значних логік тісно пов’язані введені Володимиром Рвачовим R-функції, тобто, функції, з областями визначення і значень кожної з яких пов’язана одна й та сама система альтернатив $\mathbb{A}$, і належність значення всякої R-функції до конкретної альтернативи з $\mathbb{A}$ визначається винятково альтернативами, до яких належать аргументи даної R-функції [4, с. 47]. Досі R-функції описувалися саме за допомогою зіставлення їм функцій вибраної k-значної логіки. Постає питання про застосування в цих випадках апарату теорії систем альтернатив. Це питання досі не досліджувалося.

5. *Теорія імовірностей*. Ця теорія очевидно пов'язана і з багатозначною логікою, і з системами альтернатив. Справді, простір елементарних подій X природно описується мінімальною системою альтернатив, альтернативи з якої можна зобразити рівностями виду $\boldsymbol{P}(a) = \boldsymbol{i}$, де a — елементарна подія, $\boldsymbol{P}$ — функція абсолютної імовірності, а $\boldsymbol{i} \in \mathbb{B}_X$, де $\mathbb{B}_X$ — множина числових значень імовірності для елементарних подій з X. $\mathbb{B}_X$ також можна розглядати як множину значень багатозначної логіки. Наскільки відомо автору, завершених логічних досліджень цього питання досі немає.

Філософські застосування. Відзначимо одне важливе застосування.

6. *Класифікації, типології, покриття*. У філософії та гуманітаристиці класифікації часто розглядаються як метод дослідження. Середньовічна логіка та деякі області досліджень у сучасній психології суцільно складаються з самих класифікацій. Не претендуючи на методологічний аналіз (тут краще звернутися до робіт Карла Поппера, який добре показав, що справжнім науковим методом є пошук причинно-наслідкових зв'язків), теорія систем альтернатив може прояснити саме́ питання про те, що́ вважати класифікацією. Проблема полягає в тому, що часто класифікаціями називають набори одномісних предикатів, які не є альтернативами, бо перетинаються, і/або не утворюють систему альтернатив, бо перелічені не всі. Особливо цим грішать математики, які називають класифікаціями будь-які розподіли і протиставлення взагалі, хоча для багатьох випадків годяться лише більш загальні поняття *типології* та *покриття*. Ці два поняття та їхній зв'язок із поняттям класифікації будуть описані в наступних публікаціях.

Психологічні застосування. Із точки зору психології системи альтернатив пов'язані з практичним вибором, який люди (та інші тварини, наділені психікою) здійснюють на практиці. При цьому доводиться мати справу із системами альтернатив, котрі можуть змінюватися в часі. Відзначимо дві теоретичні проблеми в цій області.

7. *Вибір альтернативи*. Перша проблема полягає в тому, щоб встановити, чи впливає на характеристики вибору потужність системи альтернатив. Інакше кажучи: якщо альтернатив мало або багато, якщо вони додаються чи зникають — як це впливає на психологічну легкість/складність вибору, на категоричність судження суб'єкта вибору щодо окремих альтернатив, на формування когнітивного дисонансу після здійснення вибору тощо. Друга проблема пов'язана з ранжуванням альтернатив за привабливістю і полягає у встановленні всіх можливих зв'язків між альтернативами, які визначають це ранжування (і призводять в окремих випадках до, приміром, суперечливих, колових ранжувань або до зміни порядку альтернатив у ранжуванні при появі нової або вилученні наявної альтернативи). Всі ці проблеми потребують як теоретичного дослідження, так і постановки експериментів (що вже частково здійснюється різними авторами).

Список використаних джерел

1. Карнап Р. *Значение и необходимость. Исследование по семантике и модальной логике*. Пер. с англ. 2-е изд. Москва: Издательство ЛКИ, 2007. 384 с.
2. Кохан Я. А. Теоретико-модельный анализ предикатов. *Седьмые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф.* (Москва, 22–24 июня 2011 г.). Москва: Современные тетради, 2011. С. 20–22.
3. Кохан Я. А. Фактуальные альтернативы вместо описаний состояния. *Восьмые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф.* (Москва, 19–21 июня 2013 г.). Москва: Современные тетради, 2013. С. 54–56.
4. Рвачев В. Л. *Методы алгебры логики в математической физике*. Киев: Наукова думка, 1974. 260 с.